线性代数　中国科学技术大学 2023 春
线性空间

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

子空间(三维空间中过原点的线和平面在高维时的推广)

定义

设 V 为 $\mathbb{F}^n$ 的一个非空子集. 若 V 满足

1. (加法封闭) 任取 $\vec{b}_1, \vec{b}_2 \in V$, 都有 $\vec{b}_1 + \vec{b}_2 \in V$;
2. (数乘封闭) 任取 $\vec{b} \in V$ 以及 $\lambda \in \mathbb{F}$, 都有 $\lambda\vec{b} \in V$.

则称 V 为 $\mathbb{F}^n$ 的子空间.

例

1. 平凡子空间
2. 生成子空间
3. 齐次线性方程组的解空间
4. 线性映射的像 (image)
5. 线性映射的核 (kernel)

线性相关等价刻画

给定一组 (列) 向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$. 则以下几条相互等价:

1. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 线性相关;
2. 存在 $i \in \{1, \cdots, m\}$ 以及 $\lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{F}$ 使得
$$\vec{a}_i = \lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_{i-1}\vec{a}_{i-1} + \lambda_{i+1}\vec{a}_{i+1} + \cdots + \lambda_m \vec{a}_m;$$
3. 存在 $i \in \{1, \cdots, m\}$ 使得
$$\vec{a}_i \in \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_{i+1}, \cdots, \vec{a}_m \rangle;$$
4. 存在 $i \in \{1, \cdots, m\}$ 使得
$$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m \rangle = \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_{i+1}, \cdots, \vec{a}_m \rangle;$$
5. 线性方程组 $AX = 0$ 有非零解, 其中 $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m)$;
6. A 不是列满秩;
7. $\det(A) = 0$ (当 $m = n$ 时).

线性无关等价刻画

给定一组 (列) 向量 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$. 则以下几条相互等价:

1. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 线性无关;
2. 任取 $i \in \{1, \cdots, m\}$ 以及 $\lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{F}$,
$$\vec{a}_i \neq \lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_{i-1}\vec{a}_{i-1} + \lambda_{i+1}\vec{a}_{i+1} + \cdots + \lambda_m \vec{a}_m;$$
3. 任意 $i \in \{1, \cdots, m\}$,
$$\vec{a}_i \notin \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_{i+1}, \cdots, \vec{a}_m \rangle;$$
4. 任意 $i \in \{1, \cdots, m\}$,
$$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m \rangle \neq \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{i-1}, \vec{a}_{i+1}, \cdots, \vec{a}_m \rangle;$$
5. 线性方程组 $AX = 0$ 无非平凡解, 其中 $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m)$;
6. A 为列满秩;
7. $\det(A) \neq 0$ (当 $m = n$ 时).

性质 (线性映射与线性相关性)

任意给定一个线性映射 $\mathcal{A}\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$. 设 $\vec{b}_1, \vec{b}_2 \cdots, \vec{b}_r \in \mathbb{F}^n$, 并记 $\vec{a}_i = \mathcal{A}(\vec{b}_i)$. 则

1. $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \cdots, \vec{a}_r$ 线性无关 $\Rightarrow \vec{b}_1, \vec{b}_2 \cdots, \vec{b}_r$ 线性无关;
2. $\vec{b}_1, \vec{b}_2 \cdots, \vec{b}_r$ 线性相关 $\Rightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2 \cdots, \vec{a}_r$ 线性相关;

例 (投影)

给定 r 个 m 维数组向量 $\vec{a}_i = (a_{i1}, \cdots, a_{im}) \in \mathbb{F}^m$ $(i = 1, \cdots, r)$. 将每个向量都扩充为一个 n 维向量
$\vec{b}_i = (a_{i1}, \cdots, a_{im}, a_{im+1}, \cdots, a_{in}) \in \mathbb{F}^n$. 则

1. $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \cdots, \vec{a}_r$ 线性无关 $\Rightarrow \vec{b}_1, \vec{b}_2 \cdots, \vec{b}_r$ 线性无关;
2. $\vec{b}_1, \vec{b}_2 \cdots, \vec{b}_r$ 线性相关 $\Rightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2 \cdots, \vec{a}_r$ 线性相关;

定义 (极大无关组)

设 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 为一组向量. 若

- 子向量组 $\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \cdots, \vec{a}_{i_r}$ 线性无关, 且
- 任加另一个向量 $\vec{a}_{i_{r+1}}$ 后, 向量组 $\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \cdots, \vec{a}_{i_{r+1}}$ 线性相关,

则称 $\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \cdots, \vec{a}_{i_r}$ 为 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的极大无关组.

性质 (通过生成子空间来判定极大无关组)

给定向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的一个子向量组 $\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \cdots, \vec{a}_{i_r}$. 则 $\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \cdots, \vec{a}_{i_r}$ 为 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的极大无关组当且仅当

- $\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \cdots, \vec{a}_{i_r}$ 线性无关, 且
- $\langle \vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \cdots, \vec{a}_{i_r} \rangle = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m \rangle$.

极大无关组例子

例

证明 $\vec{a}_1=(2,-1,3,1),\vec{a}_2=(4,-2,5,4),\vec{a}_3=(2,-1,4,-1)$ 中的任两个向量组成极大无关组.

$3\vec{a}_1=\vec{a}_2+\vec{a}_3.$

注: 不唯一! 如何寻找极大无关组? 一个一个去掉? 比较麻烦! 下面介绍简单方法.

寻找极大无关组的理论工具

原理: 初等行变换不改变列向量的线性相关性.

定理

设 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 为一组列向量. 对矩阵

$$A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m) \in \mathbb{F}^{n\times m}$$

做一系列行初等变换得到

$$B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_m) \in \mathbb{F}^{n\times m}.$$

则对于任意 $i_1, i_2, \cdots, i_r \in \{1, 2, \cdots, m\}$,

1. $\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \cdots, \vec{a}_{i_r}$ 线性相关 (无关) $\Leftrightarrow \vec{b}_{i_1}, \vec{b}_{i_2}, \cdots, \vec{b}_{i_r}$ 线性相关 (无关);
2. $\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \cdots, \vec{a}_{i_r}$ 极大无关 $\Leftrightarrow \vec{b}_{i_1}, \vec{b}_{i_2}, \cdots, \vec{b}_{i_r}$ 极大无关;

注：这个定理保证了行变换不改变列秩!

证明

$$(1) \qquad LHS \quad \Leftrightarrow AX = 0 \text{ 有非零解}$$

$$\xLeftrightarrow[P\text{可逆}]{B=PA} BX = 0 \text{ 有非零解}$$

$$\Leftrightarrow RHS.$$

$$(2) \qquad LHS \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a_{i_1}, \cdots, a_{i_r} \text{ 线性无关} \\ a_{i_1}, \cdots, a_{i_r}, a_j \text{线性相关 } \forall j \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow{(1)} \begin{cases} b_{i_1}, \cdots, b_{i_r} \text{ 线性无关} \\ b_{i_1}, \cdots, b_{i_r}, b_j \text{线性相关 } \forall j \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow RHS.$$

例

求向量组 $\vec{a}_1 = (-1, 5, 3, -2), \vec{a}_2 = (4, 1, -2, 9), \vec{a}_3 = (2, 0, -1, 4)$, $\vec{a}_4 = (0, 3, 4, -5)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 9 & 4 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\xRightarrow{\text{行变换}} \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}, \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_4\}$ 极大无关.

$\Rightarrow \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}, \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_4\}$ 极大无关.

问题: 两个极大无关组的个数是否相等?

$$\begin{tikzcd} & \vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \{\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \cdots, \vec{a}_{i_r}\} & & \vec{a}_{j_1}, \vec{a}_{j_2}, \cdots, \vec{a}_{j_s} \end{tikzcd}$$

定义 (等价)

称两向量组 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m$ 和 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_\ell$ 等价, 若

1. 任意 $i\in\{1,\cdots,m\}$, $\vec{a}_i$ 可由 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_\ell$ 线性表示;
2. 任意 $i\in\{1,\cdots,\ell\}$, $\vec{b}_i$ 可由 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m$ 线性表示;

此时记为 $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_m\}\sim\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_\ell\}$.

定理 (通过生成子空间来判定是否等价)

$$\{\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m\}\sim\{\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_\ell\} \quad\Leftrightarrow\quad \langle\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_m\rangle=\langle\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_\ell\rangle.$$

注: $\sim$ 为等价关系.

推论

1. 一个向量组与它的任一极大无关组等价;
2. 任两极大无关组等价.

极大无关组的基本性质

定理

设 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_r$ 和 $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_s$ 为两线性无关的向量组. 若它们相互等价, 则 $r = s$.

证明思路: $\begin{cases} (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_r) = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_s) A_{s\times r} \\ (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \cdots, \vec{b}_s) = (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_r) B_{r\times s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB = I_s \\ BA = I_r \end{cases} \Rightarrow r = s.$

推论

向量组 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 的任两个极大无关组中的向量个数相同. 这个数称为向量组的秩. 记为 $\mathrm{rank}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m)$ 或者 $r(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m)$.

性质 (用秩判定相关性)

1. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m) = m$;
2. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m$ 线性相关 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_m) < m$;

定理

若 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_s$ 可由 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_r$ 线性表示, 则

$$\operatorname{rank}(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_s)\le\operatorname{rank}(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_r).$$

证明思路: 不妨设 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_\ell$ 和 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_k$ 为极大无关组. 则 $(\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_k)=(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_\ell)A$, 其中 $A\in\mathbb{F}^{\ell\times k}$ 列满秩. 因此 $k\le\ell$.

推论

1. $\mathbb{F}^n$ 中任意 $n+1$ 个向量一定线性相关.
2. 若 $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_s$ 可由 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_r$ 线性表示, 则 $\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_r\}\sim\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_s\}\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\cdots,\vec{b}_s)=\operatorname{rank}(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_r)$;

推论 (用秩来判定线性方程组是否有解)

$\vec{b}$ 为 $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_r$ 的线性组合 $\Leftrightarrow$
$\operatorname{rank}(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_r)=\operatorname{rank}(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\cdots,\vec{a}_r,\vec{b})$.

向量组的秩与矩阵的秩

$$A = (a_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \cdots & \vec{b}_n \end{pmatrix}$$

我们有如下三种秩:

1. $\mathrm{rank}(A)$ 矩阵 A 的秩;
2. $\mathrm{rank}(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m)$ 矩阵 A 的行秩;
3. $\mathrm{rank}(\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_n)$ 矩阵 A 的列秩;

定理

秩 = 行秩 = 列秩.

证明思路: 初等变换不改变三者且对于标准形矩阵三者一致.

矩阵秩的一些性质

推论

设 A 为 n 阶方阵. 则

1. A 可逆 $\Leftrightarrow \mathrm{rank}(A) = n \Leftrightarrow$ 行向量线性无关 $\Leftrightarrow$ 列向量线性无关.
2. $\mathrm{rank}(A) = r \Rightarrow$ 不为零的 r 阶子式所在的行 (列) 构成的 A 的行 (列) 向量的极大无关组.

例

$$rank(AB) \leq \min\left(\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\right).$$